

Der gescheiterte Rechenunterricht: Rechenversagen – Ursachen und „Therapie“

Jens Holger Lorenz

Das Rechnenkönnen, der Umgang mit Zahlen, gehört zusammen mit dem Schriftspracherwerb zum Grundbestandteil jener Fähigkeiten, die das Schulkind auf das bürgerliche Leben vorbereiten sollen. Darüber hinaus zählt Mathematik zu den Fächern, die das Verstehen, das logische, abstrakte Denken schulen sollen. Wer also in Mathematik versagt, so die gängige Meinung (und die Befürchtung der Eltern) versagt nicht nur im späteren Leben, sondern ihm wird eine mindere Begabung für abstraktes Verstehen bescheinigt. Und was ist Intelligenz anderes?

Mathematiklernen im Unterricht und sein Versagen ist auf viele Faktoren zurückzuführen, möglicherweise auf welche, die im Schüler begründet liegen, aber wahrscheinlicher auf jene, die mit der Methodik des Unterrichts zusammenhängen.

Die Welt des Kindes hat sich aber auch verändert. Motorisch anregende Spiele auf der Straße, am Bach und in den Hinterhöfen weichen der medial vermittelten Welterfahrung (?) durch TV und Computer. Die Sprache wird durch Bilder ersetzt, aktives Eingreifen ebenso wie schmerzhaftes Anstoßen, Anecken an realen Objekten der kindlichen Lebenswelt verschwindet zugunsten passiver Rezeption.

Eine bedauerliche Entwicklung, aber was hat dies mit dem Mathematikunterricht zu tun? Nun, mathematische Lernprozesse basieren auf Handlungen, Denkstrukturen sind verinnerlichte Handlungen, wie schon Piaget feststellte. Sie bedürfen mannigfaltiger Erfahrung, die in aktive Umstrukturierung bisheriger Begriffs- und Denkformen münden. Fehlt diese Erfahrung, aus welchen Gründen auch immer, dann geht herkömmlicher Unterricht von falschen Voraussetzungen für diese Kinder aus, er stellt Anforderungen, denen sie nicht gewachsen sein können: Der Mathematikunterricht produziert selbst seine Versager mit weitreichenden emotionalen und schullaufbahnbiographischen Auswirkungen.

Trotzdem soll im Folgenden jenen Faktoren auf Seiten des Kindes nachgegangen werden, die den spezifischen (aber meist impliziten) Anforderungen des Mathematikunterrichts nicht entsprechen.

1 Verunglücktes Lernen und der Schüler

Wenn Lernen von arithmetischen Inhalten, wie alles Lernen, ein individueller Vorgang ist, dann ist es naheliegend, die Ursachen des Mißlingens auch in dem Individuum zu

suchen. Die Literatur zu Rechenstörungen ist lang, sie reicht 3000 Jahre zurück. Sie verbindet diese isolierte Störung (ähnlich wie die Legasthenie) fast immer mit hirnrorganischen Faktoren. Da sich aber ein Rechenzentrum im Cortex bislang nicht nachweisen ließ und es unwahrscheinlich ist, daß ein solches existiert, denn Rechnen ist ein hochkomplexer Vorgang, an dem viele kognitive Fähigkeiten beteiligt sind, wird von einer bestimmten Forschungsrichtung Rechenschwäche mit einer minimalen cerebralen Dysfunktion in Verbindung gebracht. Dies scheint zwei Vorteile zu besitzen: (1) Man umgeht das Problem der Hirnlokalisierung, ohne den Aspekt der organischen Beteiligung aufzugeben und hat daher (2) die Ursache der Lernstörung wieder im Schüler verortet, den Unterricht hingegen exkulpiert (vgl. Kosci, 1974; Lempp, 1979; Müller & Frostig, 1981). Allerdings hat man unter dem Gesichtspunkt der Förderung des individuellen Schülers, der von dieser Art Krankheit heimgesucht wird, nichts gewonnen.

Versucht man hingegen die Anforderungen zu spezifizieren, die der arithmetische Unterricht an die Schüler stellt, dann kommt man auf einige kognitive Faktoren, die beim Schüler entwickelt sein müssen, damit er diese Form der Wissensvermittlung durchstehen, verstehen kann.

1.1 Der Mathematikunterricht und seine Hemmnisse

Faßt man das Lernen von Mathematik als interaktiven Prozeß zwischen dem Individuum und dem Inhalt auf, wobei hier der schon in curriculare, unterrichtliche Form transponierte Inhalt gemeint ist, dann lassen sich dieser Lernprozeß und seine Störungen weder hinlänglich durch Eigenheiten dieses reinen Inhalts alleine, die über curriculare Stoffanalyse bestimmt werden (Reisman, 1978; Reisman & Kauffman, 1980), noch durch globale Persönlichkeitsmerkmale des Schülers beschreiben. Es bedarf einer Zwischenebene, in der sich beide aufeinander beziehen lassen und in der geklärt werden kann, welche Fähigkeiten für die Aneignung welchen Inhalts bei welcher Darbietungsform dem Schüler in diesem Unterricht bei diesem Lehrer abverlangt werden und wie diese Fähigkeiten bereits früh im Unterricht zu erkennen sind.

Untersucht man die kognitiven Anforderungen des arithmetischen Anfangsunterrichts, dann zeigen sich deutlich einzelne Phasen, die herkömmlicher Unterricht zu durchlaufen pflegt (Lorenz, 1992). Ausgehend von konkretem Handeln und Operieren mit Material (Phase 1) wird zu abstrakteren, bildhaften Darstellungen im Schulbuch, auf der Tafel und den Arbeitsblättern übergegangen und ziffernmäßig begleitet (Phase 2). Dahinter steht die Hoffnung, solcherart bald auf den offenen Handlungsvollzug und die Materialmanipulation verzichten zu können zugunsten bloßer Vorstellung. So kann der Unterricht schließlich auf den Ziffernumgang (Phase 3) verkürzt werden, der letztlich

automatisiert wird (Phase 4). Text- oder Sachaufgaben begleiten die jeweiligen Phasen, sie stellen aber eigene Anforderungen dar, ohne daß diese in entsprechendem Maße als Unterrichtsgegenstand thematisiert würden (Winter, 1985).

Methodisches Vorgehen	Geforderte bzw. als ausgebildet unterstellte kognitive Fähigkeiten	Mögliche Störbereiche
Konkreter Operationsaufbau; Handlungsvollzug unter Beachtung der quantitativen Struktur	Visuelle Antizipation von Teilschritten; Rückblick als vorstellungsmäßiges Erinnern; (grob-) motorische Ausführung	Visuelle Gliederung, visuelles Denken, Raum-Lage-Beziehung, Figur-Hintergrund-Differenzierung; Grobmotorik
Bildhafte Darstellung der Operationen und ziffermäßige Begleitung	Visuelle Vorstellung des Operationsablaufs bei statischer Darstellung; (fein-) motorische Ausführung der Schreibbewegung; motorisches Gedächtnis	Visuelles Gedächtnis, visuelles Operieren
Ziffermäßige Darstellung; allmählicher Verzicht visueller Bedeutung; Übergang zu logisch-unanschaulicher Handlung	Visuelle Vorstellung der Operationen an anschaulichen Handlungskorrelaten; auditives Gedächtnis	Operative Abstraktion; auditives Langzeitgedächtnis
Automatisierung im Zeichenbereich; Kopfrechnung	Assoziationsgedächtnis	Auditives Kurzzeitgedächtnis
Sachaufgaben	Leseleistung; Umsetzung Sprache-Bild; visuelle Handlungsvorstellung bei Texten i.S. von Textverständnis; Alltagserfahrung, Weltwissen	Sprachverständnis; visuelles Operieren

Abbildung: Phasen des arithmetischen Anfangsunterrichts, methodisches Vorgehen, geforderte Fähigkeiten und mögliche Störbereiche

Mit der Betonung des Lehr-Lern-Prozesses wird das Augenmerk auf die Beziehung zwischen den Besonderheiten des Unterrichts und denen der Denkprozesse des individuellen Schülers gelenkt. Es stellen sich dann Fragen wie:

- Denkt der Schüler bevorzugt sprachlich oder bildlich?
- Wie sehen seine (Fehl-)Lösungsstrategien aus? Fallen sie abhängig von der Aufgabenform aus, sind sie etwa bei schriftlichen Algorithmen anders als bei Kopfrechenaufgaben?

- Welche individuellen Handlungen führt der betreffende Schüler bei arithmetischen Operationen mit dem Material durch?

Die sich daraus ergebenden Probleme liegen auf der Hand: Es lassen sich keine schnellen Generalisierungen vornehmen und keine Klassifikationen angeben, die eine Einstufung des Ausmaßes individueller Lernschwierigkeiten erlauben und auf dieser Basis genormte Fördermaßnahmen ermöglichen. Dies mag bedauerlich sein, hebt aber die Möglichkeit hervor, im Sinne individueller Passung auf die Bedürfnisse (nicht Defizite!) des einzelnen Schülers methodisch zu reagieren.

1.2 Kognitive Faktoren

1.2.1 Sprachfaktoren

Unterricht und die darin statthabende Wissensvermittlung geschieht in weiten Zügen über Sprache. Die Sprachkompetenz wird hierbei in höherem Maße gefordert als im muttersprachlichen Unterricht! Da Zahlbeziehungen und arithmetische Operationen über räumliche und zeitliche Beziehungen verdeutlicht werden, spielt insbesondere die Diskrimination relationaler, kausaler und präpositionaler Ausdrücke eine wesentliche Rolle (an, bei, unter, über, zwischen, in, auf, vor, nach, von, um, vorher, nachher, hinter, wenn-dann, daher, weil, weder-noch, manche, keiner, fast alle, alle außer, irgendeiner, nah-fern, kurz-lang, groß, größer, am größten, immer).

An Textaufgaben scheitern Kinder häufig, nicht weil sie die dahinter liegende Mathematik nicht erkennen könnten, sondern weil ihnen für das Verständnis des Textes wesentliche Begriffe fehlen (wöchentlich, manchmal, Bergstation-Talstation, vom Konto abbuchen).

Die Sprachkompetenz wird also im Mathematikunterricht als erheblich elaboriert vorausgesetzt. Liegen, aus welchen Gründen auch immer, hier Beeinträchtigungen vor, dann kommt es zu Störungen im arithmetischen Lernprozeß, da Lagebeziehungen des Veranschauungsmaterials und räumliche und zeitliche Beziehungen der Handlungsobjekte nur unzureichend dargestellt und in interne Vorstellungen überführt werden können.

Die auditive Speicherung wird in den Eingangsklassen schon bei der Stellung kleiner Aufgaben ($4 + 3$) verlangt, insbesondere bei Kopfrechenaufgaben, in denen die Kinder kurzfristig das auditiv Wahrgenommene behalten müssen, um es ausrechnen zu können. Auch Situationsangaben und Textaufgaben erfordern von den Schülern, die jeweiligen Sätze kurzfristig zu behalten. Die „number-facts“ werden von den Kindern meist durch auditive Verbindungen gespeichert ($7 \times 7 = 49$). Es handelt sich hierbei um

Sprachketten, die im Gedächtnis abgelegt werden. Treten bei der auditiven Speicherung Überforderungen auf, so zeigen die Kinder hier Fehler, die sie bei schriftlicher Darbietung nicht aufweisen.

Schwierigkeiten der auditiven Speicherung führen auch zu Problemen, wenn die Kinder aufgefordert werden, Objekte nach mehr als einer Eigenschaft zu ordnen oder zu klassifizieren, z.B. Plättchen nach rot, klein und Dreieck. Häufig tritt der Effekt auf, daß die Schüler nur die ersten oder letzten Informationsstücke der längeren auditiven Kette im Gedächtnis behalten.

Neue Bezeichnungen für mathematische Begriffe und Eigenschaften müssen ebenfalls auditiv gespeichert werden. Schüler können durchaus über den mathematischen Begriff verfügen, erinnern aber häufig die im Unterricht verwendete Bezeichnung nicht oder verwenden fehlerbehaftete Begriffe (Dysnomie). Da im Mathematikunterricht der Grundschule bis zu fünfhundert neuer Begriffe eingeführt werden und Mathematik somit als erste Fremdsprache angesehen werden kann, kommen auf diese Kinder *unterrichtsbedingt* gravierende Probleme zu.

Häufig wird durch sehr feine Nuancen eine vollkommen andere arithmetische Aufgabe verschlüsselt. So sind die beiden Sätze „Ergänze zu den folgenden Zahlen 1000 ... “ und „Ergänze die folgenden Zahlen auf 1000 ... “ von Kindern kaum zu unterscheiden, in ihrem mathematischen Gehalt aber drastisch unterschiedlich: Das eine erfordert eine Addition, das andere eine Subtraktion. Auch die Unterscheidung zwischen „Gib mir die blauen, runden Plättchen“ und „Gib mir die blauen und die runden Plättchen“ bezeichnen einmal die Vereinigungs-, das andere Mal die Schnittmenge (oder das logische „und“ bzw. das logische „oder“).

1.2.2 Gedächtnisleistung

Jedes Lernen verlangt, daß der gelernte Inhalt gespeichert wird. Ansonsten wird man kaum von Lernen sprechen. Die Klagen der Lehrer und Eltern scheinen zu belegen, daß Gedächtnisfaktoren des Schülers beim arithmetischen Lernprozeß eine wesentliche, verhängnisvolle Rolle spielen. Was gestern noch gewußt und beherrscht wurde, ist heute schon wieder vergessen.

Die mathematischen Inhalte besitzen eine hierarchische Struktur, sie bauen aufeinander auf. Vorangehendes ist notwendiger Baustein für Nachfolgendes, und dies in deutlich höherem Maße als in anderen Schulfächern. Aus diesem Grund wachsen sich arithmetische Wissenslücken schnell zu unüberbrückbaren Kluften aus, die für Aufschüttungsversuche resistent sind. In diesem, allerdings übertragenen Sinne sind

Gedächtnisfähigkeiten vonnöten, soll altes Wissen nicht der Vergessenheit anheim fallen.

Es erscheint aber fragwürdig, Mathematiklernen auf Gedächtnisakrobatik anzulegen. Zugegeben, jeder vermag ein chinesisches Gedicht auswendig zu lernen. Aber: In kurzer Zeit wird dieser Inhalt aus dem Gedächtnis wieder verschwunden sein. Gedächtnisfähigkeit reicht offensichtlich nicht aus.

Es wird das am besten behalten, was verstanden wurde, was an andere Wissensinhalte angegliedert werden kann, vielschichtig vernetzt wird. In diesem Sinne ist es wieder das Verstehen des arithmetischen Inhalts, der entscheidend für nachfolgendes Lernen ist.

Kinder sind bezüglich des Gedächtnisses keineswegs schon kleine Erwachsene, sondern verfügen prinzipiell über ein verringertes Kurzzeitgedächtnis. Die Anzahl der Bedeutungseinheiten, die sie aktuell speichern können, beträgt in der Eingangsklasse etwa drei bis vier. Daher stellt die Kopfrechenaufgabe $4 + 3 - 2 + 4 - 6$ bereits eine prinzipielle Überforderung der Kinder dar.

Auch in den oberen Klassen der Grundschule ist die Gedächtniskapazität noch nicht hinreichend ausgebildet, um Aufgaben wie $472 + 324$ fehlerfrei im Kopf lösen zu können. Die ansteigende Fehlerrate von den Hundertern (9%) über die Zehner (18%) zu den Einern (31%) zeigt deutlich, daß diese auf Gedächtnisschwierigkeiten zurückzuführen sind. Da es sich jeweils um eine Addition ohne Zehnerübertrag handelt, kann es nicht an der Schwierigkeit der arithmetischen Operation liegen: Während die Zwischenergebnisse, beginnend bei den Hunderten, berechnet werden, werden aufgrund der geringen Kapazität die Ausgangszahlen „überschrieben“. Häufig kann man bei Kopfrechenaufgaben beobachten, daß Schüler das Endergebnis wissen, die Ursprungsaufgabe aber nicht mehr nennen können.

Aus diesem Grunde ist es didaktisch ganz wesentlich, daß bestimmte Aufgabentypen wie additive Zusammenhänge im Zahlraum bis 20 und das Kleine Einmaleins automatisiert werden. Dieses bedeutet nicht, daß für eine Drillmethode plädiert wird, aber bestimmte numerische Fakten auswendig zu wissen, bietet zweierlei Vorteile:

- Der Zeitaufwand für die einzelnen Aufgaben wird drastisch geringer; so ist durchaus zu beobachten, daß Schüler die Aufgabe $9 \cdot 9$ an den Fingern abzählend zu berechnen versuchen, wobei der Zeitaufwand bis zu 3 Minuten beträgt.
- Die Fehlerrate wird deutlich gesenkt: Kein Erwachsener antwortet auf die Aufgabe 7×7 manchmal mit 50 oder 48.

Praktisch gibt es kaum Trainingsverfahren, um das Langzeitgedächtnis zu verbessern, insbesondere existiert auch keine wirkungsvolle Chemotherapie (auch wenn dieses von besorgten Eltern oft angenommen wird). Es existieren aber Verfahren, die Situationsbedingungen im Unterricht so zu gestalten, daß Gedächtnisprozesse gefördert werden. Schüler speichern nicht willentlich, sondern es gräbt sich in ihr Gedächtnis ein, was für sie von besonderer Bedeutung ist und vielfältig an bereits bestehende Wissensinhalte angebunden werden kann. Daher erweisen sich Verfahren, die eine mannigfaltige, multisensorische Anbindung betonen, als hilfreich. Farbliche Unterstützung, taktiles und kinästhetisches Miterfassen, die Verbindung von Bild und Sprache etc. erleichtern es, durch viele Kanäle gleichzeitig die Information zu erfassen, zu integrieren und abzuspeichern (Lorenz & Radatz, 1993).

Für bestimmte Prozesse des mechanischen Automatisierens erweist es sich als nützlich, Wiederholungen im 20-Minuten-Rhythmus vorzunehmen. Nach neurophysiologischen Untersuchungen ist dieses die Zeitspanne, die für das Kurzzeitgedächtnis veranschlagt wird, anschließend gehen Teile der Gedächtnisinhalte in das Langzeitgedächtnis über. Genau diesen Prozeß kann man durch Wiederholungen zum geeigneten Zeitpunkt unterstützen.

1.2.3 Visueller Bereich

In der Altersstufe der Eingangsklassen kommen visuelle Orientierungsstörungen, d.h., Rechts-Links-Vertauschungen neurologisch bedingt häufig vor. Dieses erkennt man nicht nur an der Verwechslung von „rechts“ und „links“, das auch ein Sprachproblem sein kann, sondern an Kinderzeichnungen, die bei Rechts-Links-Entscheidungen in Diagrammen häufige Fehler aufweisen. Im arithmetischen Bereich führt das zu Zahleninversionen (43 – 34), aber auch zur Verwechslung von Operationen. Die Fehler

$$25 + 4 = 92 \quad (\text{oder } 56, 52, 65, 21)$$

$$45 + 3 = 51 \quad (\text{oder } 15, 42, 84, 24)$$

beruhen auf solchen Orientierungsstörungen. Es ist deutlich, wie die Umkehrung der Operation, die an dem inneren Bild der Zahlenfolge („mentalen Zahlenraum“, vgl. Lorenz, 1992) eine Verwechslung von „nach rechts gehen“ - „nach links gehen“ bedeutet, mit der Zahleninversion verbunden wird.

Kinder der Grundschule denken noch nicht abstrakt, formal, sondern in Bildern. Ihr Denkmedium ist die Vorstellung, in der Handlungen ablaufen und räumliche Beziehungen repräsentiert werden können. Auch Erwachsene rechnen in einem vorgestellten Zahlenraum, in dem Addition weitergehen/-springen bedeutet, Subtraktion

zurückgehen etc. Die arithmetischen Operationen werden vorgestellt, diffus (die vorgestellte Zahlenordnung besitzt keine Farbe oder andere Konkretion) aber daher übertragbar auf viele Situationen (Lorenz, 1992).

Der arithmetische Unterricht ist darauf angelegt, diesen Zahlenraum als Vorstellung bei den Kindern zu entwickeln. Hierbei wird von konkreten Handlungen ausgegangen, die in interne Bilder überführt werden sollen. Und häufig gelingt den Kindern dies auch. Aber: Vorstellungen werden nicht automatisch von den Schülern ausgebildet. Allerdings erhalten die Kinder auch keine Anleitung oder Anforderung, diese Vorstellungen zu entwickeln, es wird als Automatismus im Unterricht angenommen.

2 Verunglücktes Lernen im Mathematikunterricht

2.1 Und was sich dagegen tun läßt

Dem gängigen Mathematikunterricht liegen eine Reihe von Annahmen über Lernen und Lehren zugrunde, nicht immer zutreffende. Es ist unrealistisch anzunehmen, alle Schüler lernten arithmetische Operationen in der gleichen Weise bzw. hätten die gleichen Schwierigkeiten bei einem bestimmten Inhalt. Unterschiedliche Schüler werden verschiedene Schwierigkeiten bei dem verwendeten Veranschaulichungsmaterial, den Tafelbildern und den Lehrer- oder Schülererklärungen haben.

Je nach ihrem Vorwissen verknüpfen sie mit den Handlungen, die sie mit Material durchführen, verschiedenes und nicht immer etwas numerisches. Es ist ein Irrtum zu glauben, die mathematische Operation sei im Veranschaulichungsmittel enthalten, der Schüler könne sie ablesen, schaue er nur genau hin. Der arithmetische Zusammenhang ist lediglich ein Aspekt der Wirklichkeit und für das Kind nicht unbedingt der primäre. Zwei Mark zu besitzen ist schön, drei Mark dazu geschenkt zu bekommen noch besser, auch ohne daß man ausrechnet, daß dies fünf ergibt. Und wenn Vater dreimal in den Keller geht und jedesmal vier Flaschen Limo hochholt, dann soll er auf der steilen Treppe aufpassen, Licht anmachen, möglichst die Flaschen nicht fallen lassen, sich an den Scherben nicht schneiden etc. Daß dies zwölf ergibt (wer fragt schon danach), ist nebensächlich. Es gelingt nicht von selbst, sondern bedarf einer Aufmerksamkeitsfokussierung auf diesen numerischen Aspekt.

Lernen läßt sich nicht über den schlichten Prozeß der Aufnahme von Wissen beschreiben, sondern ist eine Konstruktion geistiger Modelle. Die Rolle des Schülers wird als notwendig aktiv angesehen, wobei es zunehmend fragwürdiger ist, ob passives Lernen überhaupt stattfinden kann. Dieses aktive Lernen läßt sich als Entdecken der arithmetischen Zusammenhänge beschreiben (Winter, 1989; Müller & Wittmann, 1995;

Lorenz, 1997). Schüler finden in neuen Situationen Unbekanntes, das sie aufgrund ihres bisherigen Wissens interpretieren und verstehen. Und sie nehmen das in der Situation wahr, was für sie bedeutsam ist. Daher ist es für das Verständnis hilfreich und nicht erschwerend, die Komplexität aufrechtzuerhalten, da in der Gesamtsituation mehr Bedeutung enthalten ist, als durch didaktische Reduzierungen erreicht wird.

Die Wichtigkeit konzeptuellen Verstehens muß gerade im Mathematikunterricht betont werden. Viel von dem arithmetischen Wissen, das sich Schüler im gängigen Unterricht aneignen sollen, ist prozedural. Sie lernen, wie bestimmte Operationen und schriftliche Rechenverfahren durchgeführt werden können und müssen. Wenn das Wissen über die Ausführung bestimmter Prozeduren nicht gleichzeitig von einem konzeptuellen Verständnis darüber begleitet ist, warum diese Prozeduren tatsächlich zu einer Lösung führen und für welchen Sachbereich und welche Probleme und Anwendungssituationen sie Geltung haben, dann ist der Schüler nicht in der Lage, diese Operationen auf neue Gegebenheiten zu übertragen. Er versteht die Mathematik nicht. Der Schüler scheitert im Mathematikunterricht, nicht weil er die schriftlichen Algorithmen nicht auswendig lernen kann, dies gelingt ihm meistens, sondern er weiß sie nicht anzuwenden.

Vordringliches Ziel des Unterrichts ist daher, die Problemlöseverfahren zu verstehen und nicht, deren Automatisierung anzustreben (Winter, 1987). Es handelt sich um Einsichten über den Geltungsbereich von Lösungsverfahren oder -heuristiken, also um das Erkennen von gleichen oder ähnlichen Strukturen. Strukturen zu erkennen, die in unterschiedlichen Kontexten auftreten und daher gleiche Lösungsverfahren zulassen, ist aber der genuine Gegenstand des Mathematikunterrichts. Hingegen scheinen Rechenstörungen dadurch gekennzeichnet zu sein, daß die Schüler die Sichtweise entwickeln (lernen), daß Mathematik im bloßen Rechnen bestehe. Hierfür gibt es Regeln, die auswendig zu lernen Aufgabe des Schülers sei (Baruk, 1989).

Der genormte Lernweg verhindert gerade das Verstehen von arithmetischen Operationen, denn diese bilden sich im Kopf des Schülers individuell unterschiedlich und bildhaft aus, wenn sie denn glücken. Welche Handlung aber zu welcher Vorstellung der Addition, der Subtraktion oder gar der Division führt, läßt sich nicht vorhersagen und durch keinen wie auch immer präzise geplanten Unterricht determinieren. Gerade rechenschwache Schüler können aus Erklärungen, die ihrer aktuellen Denkweise widersprechen, keinen Nutzen ziehen: Sie akzeptieren die Lehreraussage und versuchen für sich ein neues, meist fehlerhaftes Rechenverfahren zu bilden (und dies scheint ein Grund dafür zu sein, weshalb gewisse Länder, deren Namen ich hier verschweigen möchte, mit einer erklärend-vormachenden Unterrichtskultur in der TIMS- und der PISA-Studie so schlecht abschnitten).

Daß Kinder auf individuellen Wegen lernen, heißt, daß die Lehrerin dieses Lernen lediglich anregen, aber nicht steuern kann. Im Gegensatz zu einem gelenkten Unterricht, der auf einen fiktiven Durchschnittsschüler abzielt, lassen offene Aufgaben und Probleme diese Einzelwege ohne hemmende, normierende Beschränkung zu. Auch das bestgemeinte didaktische Vereinfachen, Elementarisieren und Zurichten stört hierbei. Offener Unterricht ermöglicht es, Hypothesen zu bilden, sie zu testen, Fehler zu machen und zu korrigieren und zu experimentieren. Es werden Fehler vorübergehend zugelassen, aus denen Schüler besser, eigenständiger und einsichtiger lernen als aus kleinschrittiger Anleitung. Indem der Schüler seinen eigenen, fehlerbesetzten Lösungsweg begründen, rechtfertigen und den Mitschülern erklären soll, ist ihm die Möglichkeit zu Heureka-Erlebnissen gegeben. Plötzliche Einsichten schießen empor, die keine Lehrerbelehrung erreicht hätte. Die soziale Entstehung von Mathematik wird deutlich: Es können vorübergehend eigene Notationsformen und Zeichen erfunden werden, die dann, aus sozialen und kommunikativen Gründen, genormt, d.h. allgemein verbindlich definiert werden.

Dieses Vorgehen, die Lernprozesse weitgehend der Steuerung der Schüler selbst zu überlassen, bedeutet eine Abkehr von der traditionellen Lehrerrolle als Informationsvermittler und Wissender, als letztem Richter über die Fehler der Schüler. Und dies scheint eines der Hauptthemen bei der „Therapie“ von Rechenstörungen zu sein.

Die Schüler bei ihren Lösungsversuchen zu begleiten (und nicht zu belehren), eröffnet der Lehrerin die Möglichkeit, die individuellen Denkprozesse, die geglückten wie die fehlerhaften, zu beobachten. Hat das Kind spezifische Schwierigkeiten, dann lassen diese sich häufig bereits hier erkennen. Auch ohne daß das Kind laut sein Denken erläutert, gibt eine Fehleranalyse Hinweise darauf, ob die Probleme im inhaltlichen Bereich liegen (z.B. fehlerhaftes schriftliches Verfahren) oder ob tieferliegende Störungen vorliegen. Aber erst ein intensives Beobachten des Schülers erlaubt, auf die idiosynkratischen Probleme einzugehen, denn falsche Lösungen können auf unterschiedliche Weise zustandekommen und bedürfen verschiedener zusätzlicher Angebote.

Beispiel: Zwei Schüler in einer Klasse rechnen $17+4=31$.

Der erste zerlegt im Kopf die Aufgabe in $7+4$ und erhält 11; dann kommt die verbleibende 10 hinzu ($=21$), allerdings muß irgendwo noch ein Übertrag gemacht werden, also 31.

Der zweite Schüler rechnet aufgrund einer Orientierungsstörung $17+4=13$ (Subtraktion statt Addition) und invertiert das Ergebnis ebenso zu 31.

Während es beim ersten Schüler möglich ist, eine Rückführung auf entsprechende Handlungen anzuregen, die er je nach Vorliebe an Mehr-System-Blöcken, der Hunderter-Tafel, dem Zahlenstrahl oder dem Rechenbrett vornehmen kann, dürfte der zweite Schüler hieraus kaum Nutzen ziehen. Sein Problem liegt in der Rechts-Links-Störung, die ihn zwar subjektiv richtig rechnen aber im Sinne des Unterrichts die falsche Operation wählen läßt. Erklärungen, Handlungen an dem Zahlenstrahl etwa, sind für diesen Schüler wenig hilfreich, da er ja in seiner Vorstellung nach rechts gesprungen ist, und $+4$ bedeutet ja an diesem Material einen Sprung nach rechts. Hier sind eher richtungsbetonende Übungen (Nachmalen von Objekten, Zeichnen von Polygonzügen mit sprachlicher Betonung der Richtung etc., vgl. Lorenz & Radatz, 1993) notwendig. Dieser Schüler benötigt keine weiteren Rechenaufgaben, denn diese hat er, sieht man von dem Orientierungsfehler ab, richtig gelöst. Traktiert man ihn aber mit Rechenübungen, die er fast notwendig falsch, nämlich nach seiner Strategie, löst, dann führt dies zu keinem Lernen, sondern zu Frustration mit allen weiteren negativen psychischen Folgen.

Der Unterricht, der sich auf das Lösen vieler Rechenaufgaben beschränkt, vertraut darauf, daß Schülern von selbst Vorstellungsbilder zu den arithmetischen Operationen aufbauen. Dies tun einige Kinder aber nicht. Sie entwickeln keine bildhaften Prototypen zu den Grundrechnungsarten, etwa Addition heißt, zu einer Menge kommt etwas hinzu, Subtraktion bedeutet, von einer Menge wird etwas weggenommen, Multiplikation ist das wiederholte Durchführen einer Handlung und Division liegt vor, wenn eine Menge auf- oder verteilt wird. Die Kinder müssen angeregt werden, Vorstellungen auszubilden, indem sie

- die Handlung nicht offen sondern unter einem Tuch durchführen,
- die Handlung nur teilweise vollziehen und die ausgelassenen Teile beschreiben,
- die Handlung aufmalen: „Wenn ich das tue, dann sieht das so und so aus“,
- immer weniger Handlungsteile durchführen und diese schließlich nur noch beschreiben oder zeichnen.

Die arithmetischen Operationen verstehen heißt auf dieser Altersstufe, bildhafte Korrelate zu besitzen, die allgemein genug sind, daß sie auf verschiedene Situationen übertragen werden können. Mathematik denken bedeutet, in vielfältigen Situationen ähnliche Strukturen zu erkennen, indem sie mit einem inneren Vorstellungsbild einer Operation verglichen werden.

Der Rechenunterricht scheitert, wenn die Schüler keine Gelegenheit besitzen, solche Vorstellungen zu entwickeln, weil sie durch das Fehlen problemhaltiger Situationen nicht angeregt werden, ihre eigenen geistigen Konstruktionen zu erproben.

2.2 Einige Prinzipien, Schwierigkeiten aufzudecken

2.2.1 Fehleranalyse

Sehr viel von den kognitiven Schwierigkeiten und Besonderheiten des einzelnen Schülers läßt sich an seine Fehlern ablesen. Die Fehleranalyse liefert bereits Hinweise darauf, welche Mißkonzeptionen beim Schüler vorliegen und welche fehlerhaften Algorithmen er bevorzugt.

2.2.2. Anamnese

Wenn bereits deutlich wird, daß es sich nicht lediglich um mißverstandene Begriffe oder nur fehlerhafte Lösungsstrategien handelt, sondern möglicherweise tiefer liegende kognitive Bereiche beeinträchtigt sind, lohnt es sich, nähere Informationen über die kindliche Entwicklung von den Eltern einzuholen. Dieses dient dazu, die psychomotorische Frühentwicklung des Kindes abzuklären, die Hinweise auf bestimmte Entwicklungsverzögerungen und Erfahrungsdefizite geben kann. Bedeutsam erscheint auch, welche Spiele das Kind im Vorschulalter vermieden hat und welche es favorisierte. Insbesondere die Vermeidung von Spielen deuten häufig darauf hin, daß das Kind in speziellen kognitiven Fähigkeitsbereichen von dem betreffenden Spiel überfordert wurde. Vermeidet das Kind Memoryspiele, dann häufig deshalb, weil sich die anderen Alterskameraden die Lage der Kärtchen besser merken können (Gedächtnisleistung). Lehnt es Lego oder Fischer-Technik ab, dann häufig, weil die geforderten Fähigkeiten im Anschauungs- und Vorstellungsbereich eine Überforderung darstellten. Dies wird von den Eltern meist nicht als Fähigkeitsbeeinträchtigung erkannt, sondern als Besonderheit des Kindes abgetan („er hat halt lieber Fußball gespielt“). Fördermaßnahmen im Unterricht müssen dementsprechende Erfahrungen nachzuholen suchen.

2.2.3. Beobachtung des Problemlöseverhaltens

Die wichtigste Informationsquelle ist die Beobachtung des Problemlöseverhaltens. Welche Begriffe hat der Schüler wie ausgebildet, welche Algorithmen sind entwickelt? Welche typischen Fehler treten bei ihm auf und wie denkt er bei diesen Fehllösungen? Die Analyse der schriftlichen Fehler ist zwar hilfreich, läßt aber noch zu viele Möglichkeiten offen. So können verschiedene Fehlstrategien zur gleichen Fehllösung führen, eine Fehlstrategie kann auch in eine richtige Lösung münden. Die Strategie zeigt der Schüler erst, wenn er bei der Aufgabenbearbeitung laut denkt.

2.2.4. Beobachtung des Spiel- und Malverhaltens

Aus der Beobachtung des Spiel- und Malverhaltens hat die Grundschullehrerin meist schon sehr viele Hinweise darauf, wo spezifische kognitive Beeinträchtigungen oder Erfahrungsdefizite des Kindes liegen. Unausgeglichene Längenproportionen, Schwierigkeiten beim Nachzeichnen oder Längenschätzen, bei Spiegelbildern oder dem Nachbauen von Objekten, dem Nichterinnern und dementsprechenden Fehlen nicht sichtbarer, verdeckter Objekte etc. geben Aufschluß darüber, wo eine gezielte Förderung ansetzen muß.

Im Unterricht selbst läßt sich erfassen, welche Hilfsmittel das Kind verwendet, beziehungsweise welche Veranschaulichungsmittel von ihm bevorzugt werden.

2.2.5. Tests

Üblicherweise stehen bei einer schulischen Diagnose Leistungstests im Vordergrund. Die oben beschriebene Diagnostik ist ebenfalls schülerzentriert und mag so zu dem Fehlschluß verleiten, Lernprobleme primär im Schüler selbst zu verorten. Dies erscheint subjektiv dem Lehrer und der Lehrerin naheliegend: Es kann nicht am Unterricht liegen, da ja die anderen Kinder diese Schwierigkeiten nicht aufweisen.

Das Vorgehende aber sollte vor allem betonen, wie mit der gängigen Form des Unterrichts unbedacht und ungewollt bei bestimmten Kindern Lernprobleme erzeugt werden können. In diesem Sinne handelt es sich um ein Passungsproblem zwischen dem Unterricht bzw. der Unterrichtsmethodik und den Lernbesonderheiten des Kindes. Die pädagogische Aufgabe der Lehrerin besteht gerade darin, die individuellen Besonderheiten des Kindes wahrzunehmen und in den Unterricht zu integrieren, bevor Lernprobleme auftreten. Dies verlangt von ihr ein hohes Maß an Differenzierung und Individualisierung. Hierfür sind aber im Rahmen neuerer pädagogischer Strömungen wie offenem Unterricht und Wochenplan genügend Möglichkeiten gegeben. So gesehen ist die beste Prophylaxe für Lernstörungen immer noch ein guter Unterricht.

3 Einige frühe Anzeichen für mathematische Lernschwierigkeiten

Diese sollen lediglich stichwortartig benannt werden.

3.1 Inhaltsbezogen

- Der Schüler beherrscht nur mechanisch die Zahlwortreihe. Er kann kaum rückwärts zählen, in Schritten/Sprüngen zählen ... (1. Schulj.).
- Die Mengeninvarianz (sensu Piaget) wird nicht sicher eingesehen (Anf. 1. Schulj.). Einfache Punktmengen, Darstellungen, Ziffernmengen können nach ausführlicher Betrachtung nicht für 5–10 sec im Kopf behalten werden.
- Gleichheitsrelationen und Ordnungsrelationen (kleiner, größer) zwischen Mengen und zwischen Zahlen werden nicht erkannt (1. Schulj.)

- Die Zahlbeziehungen bereiten Schwierigkeiten, der Nachfolger und der Vorgänger einer Zahl können nicht bestimmt werden, ebenso „die Hälfte von...“, „das Doppelte von...“ (1./2. Schulj.).
 - Schwierigkeiten beim Schreiben und Lesen von Zahlen (z.B. 35 statt 53); die Bedeutung von Bündelung und Stellenwert im dekadischen Positionssystem ist nicht bewußt (1./2. Schulj.).
 - Additions- und Subtraktionsaufgaben im Bereich bis 20 werden noch nicht auswendig gewußt, sondern immer noch zählend o.ä. gelöst (2./3. Schulj.).
 - Grundvorstellungen von Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division fehlen (2. Schulj.).
 - Bei Sachaufgaben ist der Schüler kaum in der Lage, aus den Sachinformationen die notwendige Rechenoperation 'herauszulesen' (2.-4. Schulj.).
 - Dekadische Analogien werden nicht erkannt und genutzt (z.B. bei $128+17$; $18+17$; $18+7$; $8+7$; ...) (3./4. Schulj.).
 - Der Schüler hat keine Lösungsstrategien, um Additions- und Subtraktionsaufgaben in größeren Zahlenbereichen zu lösen. Er rechnet oft noch auszählend (3./4. Schulj.).
- u.v.a.m. (Es müssen nicht alle Symptome gleichzeitig auftreten.)

3.2 Inhaltsübergreifend

- Der Schüler hat motorische Störungen wie
 Laufen, Springen, auf einem Strich gehen, beidbeinig oder re/li hüpfen, fangen, Extremitätenkoordination
 Schreib- und Malbewegung imitieren
 und (vermeintlich motorische) Störungen wie
 Schnürsenkelbinden
 Jacke knöpfen
- Der Schüler hat Schwierigkeiten beim Verständnis mathematischer Symbole und deren Verwendung (z.B. häufiges Verwechseln von $(+ - : = < > \dots)$); die Zeichen innerhalb einer Gleichung werden vertauscht.
 - Die Anordnung der Aufgaben/Zahlen auf einem Arbeitsblatt/einer Schulbuchseite bereitet Schwierigkeiten. Die Aufgabe wird nicht (wieder)gefunden.
 - Auffällige Probleme beim Erfassen, Diskriminieren, Speichern visueller Informationen bzw. sog. Veranschaulichungen (Zahlenbilder, Zahlenstrahl, Darstellungen u.a.).
 Unter einem Tuch versteckte Objekte werden nicht erinnert.
 Raumzeitliche Verläufe/Handlungen können vom Schüler nicht beschrieben werden (Erinnerungen an den Urlaub).
 - Die Vorstellungen von Größen sind überaus unrealistisch, der Umgang mit Geld, Uhr, Maßband, Waage u.ä. wird vermieden. Insbesondere sind die Begriffe von räumlichen und zeitlichen Beziehungen (5 cm, 2 min. ...) unzureichend ausgeprägt.
 Wie viele Schritte sind es bis zur Tür? - 3, 10, 50?
 Wie weit komme ich, wenn ich 3 (7) Bleistifte aneinander lege?
 Was war heute früher/später: Mathe oder Sport?
 Wofür kannst Du mehr kaufen: Für 50 Pfennige oder für 1 Mark?
 - Das Verständnis der geometrischen Lagebeziehungen (rechts-links, oben-unten, vorne-hinten, zwischen, über etc.) und der Qualitätsbegriffe (größter, kleiner, länger, kürzer ...) ist unzureichend (Schulanfang/1. Schlj.), das sprachliche Verständnis bei entsprechenden Anweisungen erschwert.

- Die Mengen im Alltagsleben werden falsch eingeschätzt (Butter, Marmelade für eine Brotscheibe, Tisch wird falsch gedeckt, Flüssigkeit in ein Glas füllen, Zeitgefühl, ...).
 - Der Schüler kann mündlich gegebene Aufgaben/Zahlsätze nicht im ‚Kopf‘ behalten.
Er hat Schwierigkeiten, Gedichte/Lieder auswendig zu lernen oder komplexere Anweisungen zu befolgen.
 - Der Schüler kann oft die Reihenfolge der Teilschritte/Teillösungen einer Rechenaufgabe nicht einhalten bzw. die Aufgabe zu Ende führen.
 - Begriffe, Regeln, Zahlsätze werden mechanisch eingepägt (oft wie sinnlose Silben), besondere Einprägestrategien werden kaum verwendet.
 - Spiele wie Memory, Puzzle, Legosteine, Fischertechnik, Bausteine, Malen/Zeichnen, Wimmelbilder u.ä. werden gemieden (weil es schwer fällt).
 - (Fingeragnosie)
- u.v.a.m. (Es müssen nicht alle Symptome gleichzeitig auftreten.)

4 Voraussetzungen für die Rechenfertigkeit und Fördermöglichkeiten

4.1 Eins–zu–Eins–Entsprechung

Förderung durch Ordnungs-, Raumbeziehung, Körperwahrnehmung, Körperschema, Einbeziehung der Sprache, Gestaltwahrnehmung, Orientierung am Körper, im Raum, Psychomotorik, Schatten-, Würfel-, Abzählspiele (Zählen–Handeln)

4.2 Zählkompetenz

Förderung durch Zähl-, Spiellieder, Rhythmus, Platz in Reihen, Folgen

4.3 Zuordnung Menge–Symbol

Störungen bei Verbindung

Mengenbild (visuell) → Zahlzeichen (visuell)

Zahlwort (auditiv) → Zahlzeichen (visuell)

Zahlzeichen (visuell) → Mengenbild (visuell)

4.4 Mengenerlegung

Fördern durch Sortieren, Zahlenbildzerlegung, Untermengenbildung, Klassifizieren

4.5 Erhaltung quantitativer Größe

Fördern durch Übungen mit Piaget-Versuche, Kneten, Flüssigkeit, Falten, Backen

4.6 Sprache der Arithmetik (Zeichenbedeutung)

Fördern durch Erfinden eigener „Sprache“ und Symbole, Übersetzungsregeln, Symbole als Handlungsprotokoll, –anweisung, Lesen der Zeichen

4.7 Visuelle Diskriminierung der Zeichen

Fördern durch optische Hilfen, Farben, Einrahmungen, Eselsbrücken

Es ist zu hoffen, daß bei entsprechender Förderung im Grund- und Sonderschulunterricht auch jene Kinder wieder ihren Platz und ihre Lernsituation in der Klasse finden, die bislang als rechenschwach ausgesondert wurden.

Literatur

- Baruk, S.: Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik. Basel 1989.
- Frostig, M. & Müller, H. (Hrsg.) (1981). *Teilleistungsstörungen - Ihre Erkennung und Behandlung bei Kindern*. München.
- Kosc, L.(1974). Developmental dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, 7, 164-177.
- Lempp, R. (Hrsg.) (1979). *Teilleistungsstörungen im Kindesalter*. Bern: Huber.
- Lorenz, J.H. (1987). Zur Untersuchung sogenannter „pathologischer Fälle“ und ihr Zusammenhang zum Mathematiklernen der „Normalen“. In: K. Hausmann und M. Reiss (Hrsg.), *Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse*. Göttingen 1990.
- Lorenz, J.H. (1991). Rechenschwache Schüler in der Grundschule - Erklärungsversuche und Förderstrategien - Teil I. *Journal für Mathematikdidaktik*, 12(1), 3-34.
- Lorenz, J.H. (1991). Rechenschwache Schüler in der Grundschule – Erklärungsversuche und Förderstrategien – Teil II. *Journal für Mathematikdidaktik*, 12(2-3), 171-198.
- Lorenz, J.H. (1991). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht - Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.
- Lorenz, J.H. & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel.
- Müller, G.N. & Wittmann, E.Ch. (Hrsg.)(1995). *Mit Kindern rechnen*. Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.
- Radatz, H.: Schülervorstellungen von Zahlen und elementaren Rechenoperationen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1989. Bad Salzdetfurth 1989, S. 306-309.
- Reisman, F.K. (1978). *Diagnostic teaching of elementary school mathematics: Methods and content*. Chicago.
- Reisman, F.K. und Kauffman, S.H.: *Teaching mathematics to children with special needs*. Columbus 1980.
- Winter, H.(1985). *Sachrechnen in der Grundschule*. Bielefeld.
- Winter, H.: *Mathematik entdecken – Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule*. Frankfurt 1987.
- Winter, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Braunschweig 1989.