

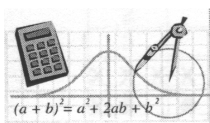
Newsletter

Mathématiques

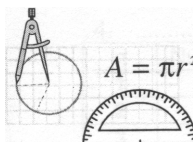
Contenu

No. 01/04

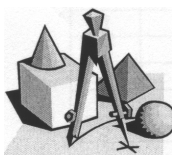
Organisation du domaine de la culture mathématique



Les situations & les compétences



Les idées majeures



Répartition des items selon: formats, classes de compétences, idées majeures

Editeur responsable de la newsletter:

SCRIPT

Ministère de l'Éducation Nationale, de la Formation Professionnelle et des Sports

Préface

Alors que la première Newsletter PISA-Mathématiques analysait les relations entre un problème de mathématiques de l'étude PISA 2000 (Programme for International Student Assessment) et les différents curricula de l'enseignement post-primaire au Luxembourg, la Newsletter 2 présentait un échantillon de problèmes de mathématiques présents dans les livres de mathématiques « luxembourgeois » afin de permettre au corps professoral de se faire une idée des problèmes posés dans le cadre du test PISA 2003. La présente Newsletter 3 a pour objectif de présenter plus explicitement comment le domaine des mathématiques qui est le domaine central du test 2003 a été organisé.

Organisation du domaine de la culture mathématique

L'objectif du test PISA 2003 est d'évaluer la capacité des adolescents de 15 ans à « manipuler » de façon appropriée des connaissances mathématiques pour résoudre des problèmes issus de situations de la vie réelle. Pour décrire le domaine de la culture mathématique il faut considérer trois composantes :

- les situations dans lesquelles sont situés les problèmes,
- les connaissances mathématiques à mobiliser pour les résoudre (ces contenus ont été regroupés en idées mathématiques majeures) et
- les compétences à mettre en œuvre pour relier le problème réel aux mathématiques afin de résoudre le problème

Dans la suite les trois composantes seront présentées plus en détail.

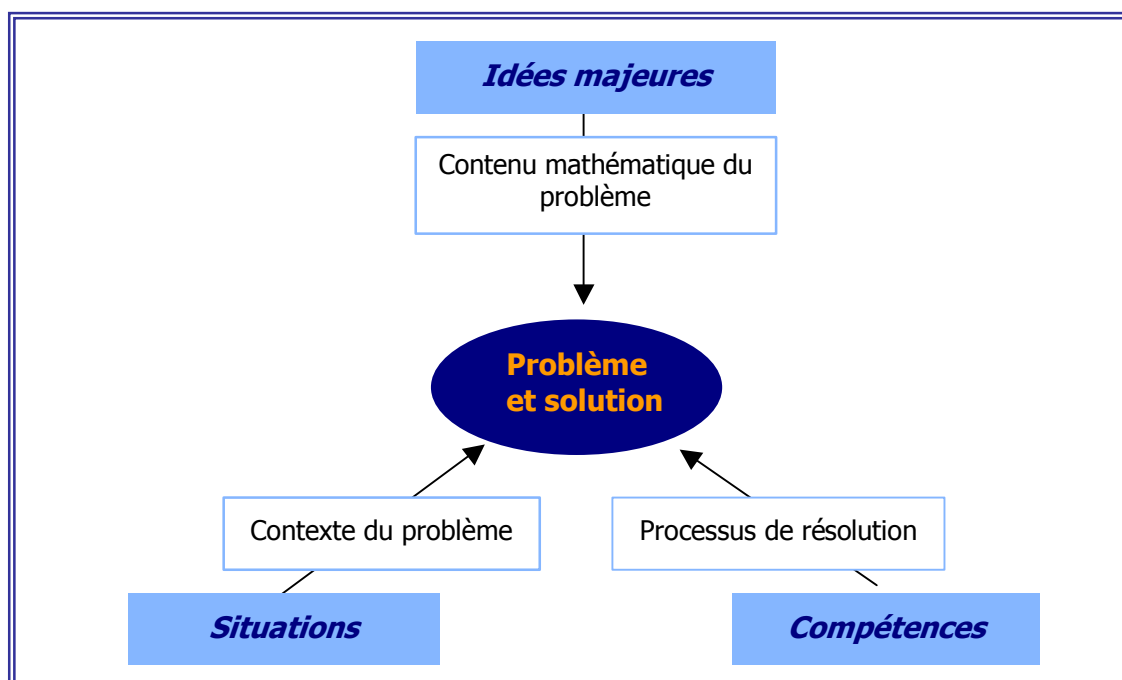


Figure 1 : Organisation du domaine de la culture mathématique selon PISA

Les situations

Le contexte dans lequel un problème est présenté influence le choix des représentations mathématiques et par conséquent les méthodes de résolution choisies. La plupart des situations sélectionnées pour les problèmes de l'étude PISA 2003 gravitent autour de la vie de tous les jours des adolescents. Elles sont classées en fonction de leur « distance » par rapport aux préoccupations des élèves :

- situations en relation avec le monde des adolescents
- situations en relation avec le monde du travail
- situations en relations avec la vie publique
- situations en relations avec les sciences (la catégorie la plus éloignée).

En général les problèmes du test PISA mettent l'accent sur des tâches qui peuvent être rencontrées dans la vie de tous les jours et qui possèdent un contexte authentique où un usage pertinent des mathématiques influence la solution et son interprétation. Un contexte est considéré comme authentique s'il se situe dans le domaine du vécu et des pratiques effectives des personnes à évaluer. Il y a aussi des problèmes où le contexte est plus « imagé », ils doivent cependant comporter des éléments pas trop éloignés du monde réel. Dans ce cadre un problème traitant des problèmes de placement d'argent dans une banque à un taux d'intérêt réaliste est un problème réel même s'il sort de la sphère d'expérience immédiate de l'élève.

Les compétences

Un autre aspect important du domaine de la culture mathématique est celui des compétences. Il consiste en une liste de compétences générales mathématiques applicables à tous les niveaux d'enseignement. Cette liste non hiérarchisée comprend les éléments suivants :

- capacité de pensée mathématique,
- capacité d'argumentation mathématique,
- capacité de modélisation mathématique,
- capacité de poser et de résoudre des problèmes,
- capacité de représentation mathématique,
- capacité symbolique, formelle et technique,
- capacité de communiquer,
- capacité de manier les outils et les instruments.

Ces compétences ne sont cependant pas évaluées séparément car pour résoudre des problèmes il est habituellement nécessaire de recourir à un bouquet de capacités choisies parmi ceux de la liste précédente. Afin de prendre en compte ce « regroupement de compétences » lors de l'évaluation des items du test PISA les savoirs-faire ont été regroupés en classes de compétences.

Les classes principales sont décrites dans une publication du ministère de l'éducation nationale française « Les compétences des élèves français à l'épreuve d'une évaluation internationale »

- Classe 1 : reproduction, définitions, calculs
- Classe 2 : mise en relation et intégration pour résoudre des problèmes
- Classe 3 : mathématisation, généralisation et compréhension en profondeur.

Les compétences de classe 1

reproduction, définitions, calculs

Dans cette classe sont groupés les aspects rencontrés fréquemment dans les tests d'évaluation standardisés, ainsi que dans les études comparatives internationales. Le maniement d'énoncés utilisant des expressions symboliques et des formules « standard » fait partie de cette classe ainsi que l'exécution de calculs. Les formats d'items utilisés pour tester les compétences de cette classe sont habituellement des questions à choix multiple ou des questions ouvertes à réponse courte.

Les compétences de classe 2

mise en relation et intégration pour résoudre des problèmes

Dans cette classe l'aspect majeur est l'établissement de liens entre les différents éléments et domaines des mathématiques et l'intégration d'informations diverses dans le but de résoudre des problèmes simples. Pour cela, les élèves doivent choisir entre plusieurs stratégies et plusieurs outils mathématiques.

Un élève qui atteint le niveau de compétences de classe 2 doit être capable de manier diverses méthodes de représentation en fonction de la situation et de l'objectif visé. Il faut qu'il soit à même de distinguer et de relier différents énoncés, tels des définitions, affirmations, exemples, assertions conditionnelles et démonstrations.

Les compétences de classe 3

mathématisation, généralisation et compréhension

Dans les items de cette classe, on demande aux élèves de mathématiser des situations c'est-à-dire d'opérer une traduction de la *réalité* vers la structure mathématique. Ils doivent pouvoir identifier et extraire les concepts mathématiques inhérents à une situation donnée et se servir des mathématiques pour analyser et interpréter le problème. Pour le résoudre il faudra qu'ils soient à même d'élaborer leurs propres modèles et stratégies et de développer une argumentation mathématique, y compris des démonstrations et des généralisations.

Les idées majeures¹

Variations et relations

Tout phénomène naturel est la manifestation d'un changement. Une grande partie de ces variations (taux de chômage, prix du pétrole, conditions météorologiques, indice de la bourse etc.) peut être représentée par des fonctions mathématiques (fonctions linéaires, périodiques, exponentielles, logarithmiques). Qui dit variations, dit aussi réflexion en termes de relation. Cela implique que les élèves devront être capables de reconnaître et de comprendre les diverses variables, savoir les représenter sous différentes formes (graphiques), les mettre en relation et les appliquer dans leur vie quotidienne, dans un monde en perpétuelle mutation.

Commentaire

Le problème ci-dessous n'est pas très complexe pour les élèves : il y a peu de texte et le diagramme est clair. Les élèves doivent d'abord relier texte et diagramme, puis essayer de lire les différentes représentations graphiques et d'y associer leur

raisonnement pour la solution. Ces compétences font partie de la classe « mise en relation et intégration ». Il est intéressant de noter que cet exercice contient beaucoup d'informations superflues. Les mesures du réservoir sont bien détaillées et le débit s'élève à un litre par seconde. Mais toutes ces informations ne sont pas utiles pour les élèves parce que les diagrammes sont globaux et peu détaillés.

L'énoncé de ce problème peut intriguer à première vue car on voit rarement apparaître des données superflues dans les exercices mathématiques; pourtant dans la vie de tous les jours on a affaire avec des informations inutiles dès qu'on traite des problèmes quotidiens. En effet une grande partie des compétences mathématiques réside dans le fait de savoir « mathématiser » la situation ou le problème et de se débarrasser de toute donnée superflue.

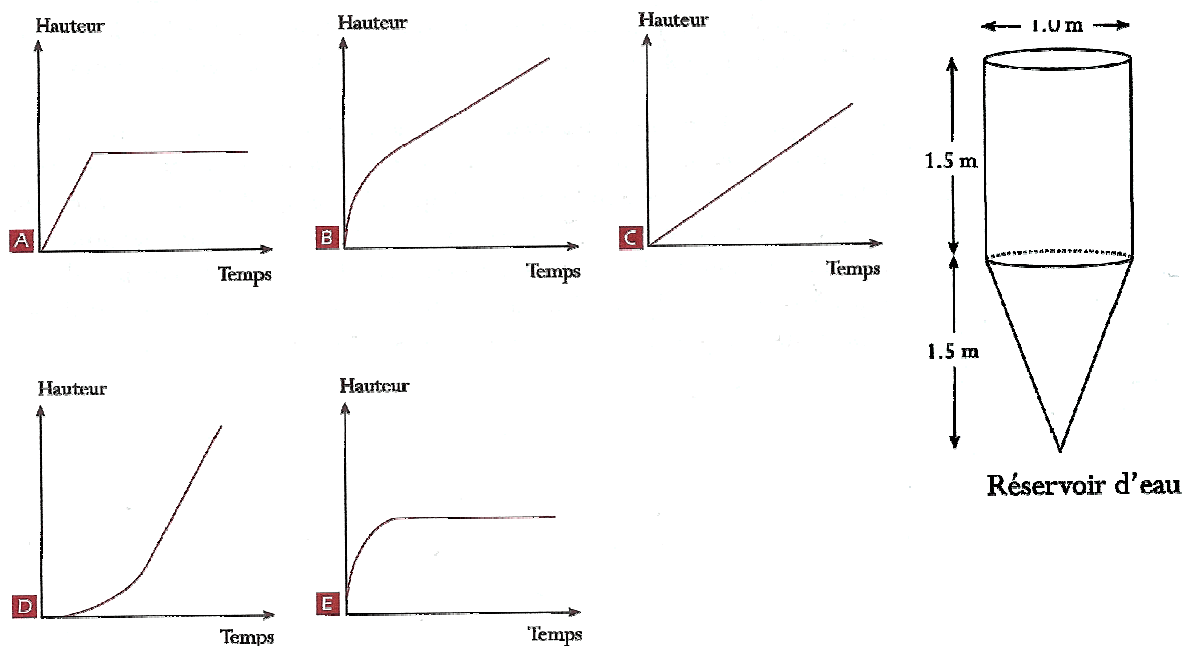
Bien que cet exercice soit classifié « scientifique », des problèmes semblables apparaissent dans la vie courante. Remplir un verre, un vase ou un seau, particulièrement quand le récipient n'est pas cylindrique, peut causer quelques surprises si on ne tient pas compte du fait que le débit dépend de la forme du solide. De telles réflexions font partie de la culture mathématique.

¹ Les idées majeures d'après la publication de l'OCDE « The PISA 2003 Assessment Framework »

Exemple illustrant cette idée mathématique majeure

Un réservoir qui est vide sera rempli avec de l'eau ayant un débit de 1 litre.

Parmi les cinq graphiques ci-dessous, quel est le diagramme qui montre comment le niveau de l'eau change avec le temps ?



Raisonnement quantitatif

Cette idée mathématique majeure se concentre sur les besoins de quantification dans l'organisation du monde. Les aspects importants incluent une compréhension de la notion de taille relative, l'identification de modèles numériques et l'utilisation de nombres afin de représenter des quantités et des attributs quantifiables d'objets réels (des comptages et des mesures). En outre, le raisonnement quantitatif inclut le traitement et la compréhension des nombres qui se présentent à nous sous diverses manières.

Le raisonnement quantitatif est un moyen important pour traiter de problèmes liés aux quantités. Les éléments essentiels du raisonnement quantitatif sont le sens des nombres, la représentation des nombres dans divers contextes, la compréhension de la signification des opérations, le sens de l'ordre de grandeur d'un nombre, le sens pour des calculs mathématiquement élégants, pour le calcul mental et l'estimation.

Exemple illustrant le raisonnement quantitatif : CK CONCERT

Pour un concert de rock un terrain rectangulaire de 100 m sur 50 m était réservé au public. Tous les tickets pour le concert étaient vendus et le public se tenait debout sur le terrain entièrement rempli. Laquelle des estimations suivantes du nombre de personnes semble être la meilleure ?

A	2 000
B	5 000
C	20 000
D	50 000
E	100 000

Commentaire

L'exercice du type QCM met en évidence l'importance de la capacité d'estimation comme élément de l'arsenal quantitatif du citoyen mathématiquement instruit. Cet exercice est placé dans un contexte qui devrait être raisonnablement maîtrisé par beaucoup d'élèves de 15 ans. Cependant, après un peu d'interprétation, il exige des élèves de prendre un rôle actif en formulant des conjectures sur la place qu'en moyenne une personne se tenant dans une foule pourrait raisonnablement occuper.

Cinq propositions de réponses ont été fournies. Les étudiants n'ont eu qu'à choisir la meilleure.

La proposition A (2000) implique que les personnes occuperaient en moyenne 2,5 m², ce qui est difficile à admettre sachant que tous les tickets étaient vendus.

La proposition E (100 000) implique 20 personnes par mètre carré, à peine possible et certainement pas réaliste. Ceci fait que les élèves devaient se décider entre les trois propositions intermédiaires : 1 personne, 4 personnes ou 10 personnes par mètre carré en moyenne. Laquelle de ces propositions est la plus réaliste dans les conditions décrites ? Environ 30% des élèves ont choisi l'option C (20 000).

Espace et formes

Dans l'étude des formes (maisons, églises, ponts, plans de villes, etc.), les élèves doivent s'intéresser à leurs similitudes et à leurs différences, en se servant des structures géométriques comme modèles. Les élèves devront en outre être capables de comprendre la relation entre la forme et son image ou sa représentation visuelle – par exemple entre une ville réelle et ses plans ou ses photographies.

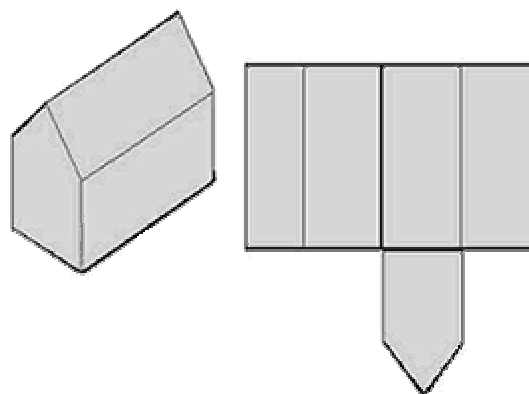
L'étude des formes est étroitement liée à l'appréhension de l'espace. Cela implique notamment d'être capable de comprendre les positions relatives des objets. Ils doivent aussi comprendre comment représenter des objets de trois dimensions en deux dimensions (« perspectives »).

Commentaire

Cet exemple illustre très bien l'idée mathématique « Espaces et Formes ». L'élève est amené à réfléchir sur deux formes différentes représentant une grange. Pour relier le développement de la grange à sa représentation en perspective et le compléter, l'élève doit se servir des structures géométriques simples qui la composent: le rectangle et le triangle. Même si les élèves de 15 ans n'ont pas encore étudié la géométrie dans l'espace, la simplicité de la structure de la grange et une appréhension naturelle de l'espace permettront à beaucoup d'entre eux de compléter correctement le développement de la grange..

Exemple illustrant cette idée mathématique majeure

Une grange est représentée ci-dessous en deux dimensions, ainsi que son développement incomplet. Le problème consiste à compléter le développement de la grange.



L'incertitude et le hasard

L'incertitude englobe deux sujets qui sont reliés entre eux : les données et le hasard.

Chacun d'eux fait respectivement l'objet d'études mathématiques en statistique et en probabilité.

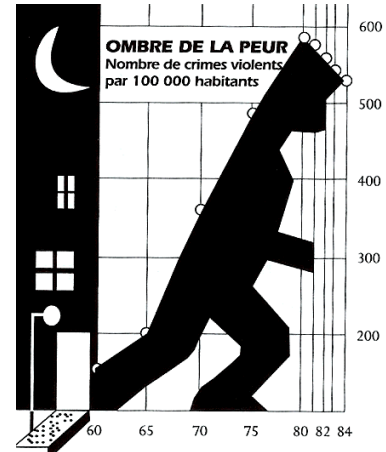
Des activités et concepts importants sont: la collecte des données; les données ne sont pas simplement des nombres, mais ce sont des nombres pris dans un contexte sur lequel il faut donc mobiliser des connaissances pour être en mesure de comprendre et d'interpréter correctement ces données plutôt que d'effectuer simplement des opérations arithmétiques; l'analyse des données et leur présentation ou visualisation, leurs descriptions numériques comme par exemple la moyenne et la médiane; une attitude critique est indispensable pour repérer les pratiques trompeuses; le concept de probabilité est basé de manière générale sur des situations faisant intervenir des « machines aléatoires » de type : pièces de monnaie, dés cubiques, roues de nombres, etc. D'autres exemples de situations où apparaît également l'incertitude sont: les variations naturelles de la taille des élèves, leurs scores en lecture, les salaires d'un groupe de personnes, etc. En dénombrement le raisonnement déductif joue un rôle mineur pour les élèves concernés par l'étude PISA à cause de leur traitement plutôt formel et des méthodes spécifiques normalement réservées aux élèves du cycle supérieur.

Commentaire

Dans cet exemple les données brutes ne sont pas fournies. Chacun des trois groupes de l'exemple a un intérêt à présenter ces données sous une forme attrayante pour la clientèle visée : le journal en rajoutant le cambrioleur, les fabricants de systèmes d'alarmes en provoquant un sentiment d'insécurité face à une criminalité en augmentation suggérée par leur graphique et enfin la police en voulant au contraire suggérer une baisse de la criminalité. L'élève est donc censé comprendre les données dans leur contexte, analyser de façon critique ces données ainsi que leurs représentations et être capable de produire lui-même une représentation de ces données en mettant l'accent sur la diminution récente du nombre de crimes.

Exemple illustrant l'analyse de données : Rising crimes

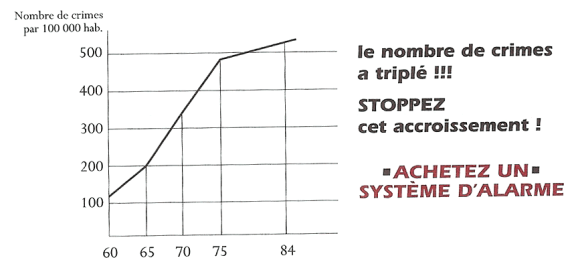
1) Le graphique suivant a été tiré de l'hebdomadaire **Zealand News Magazine** :



Il montre le nombre de crimes déclarés sur 100 000 habitants, d'abord sur des intervalles de cinq années et ensuite sur des intervalles d'une année.

Quel est le nombre de crimes déclarés sur 100 000 habitants en 1960 ?

2) Des fabricants de systèmes d'alarmes se sont servis des mêmes données pour produire le graphique suivant :



Comment ce graphique a-t-il été obtenu par ses auteurs et pourquoi ?

3) La police n'a pas trop apprécié le graphique des fabricants de systèmes d'alarmes parce que la police aurait voulu montrer que la lutte contre le crime avait été efficace.

Elaborer un graphique dont la police pourrait se servir afin de démontrer que la criminalité a diminué récemment.

PISA 2003 : Nombre d'items mathématiques

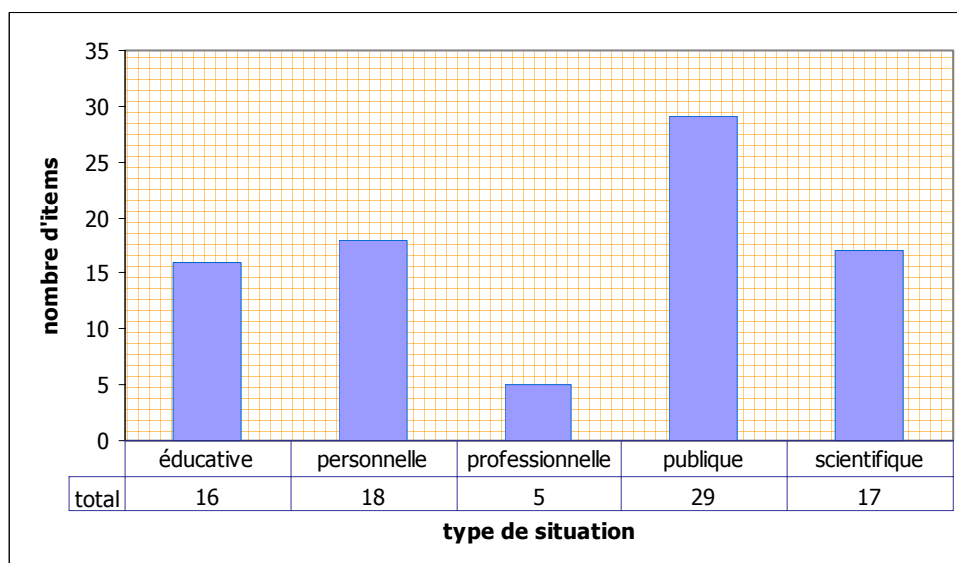


Figure 2 : Nombre d'items mathématiques répartis selon les contextes présents au test PISA 2003

PISA 2003 : Formats des questions du test

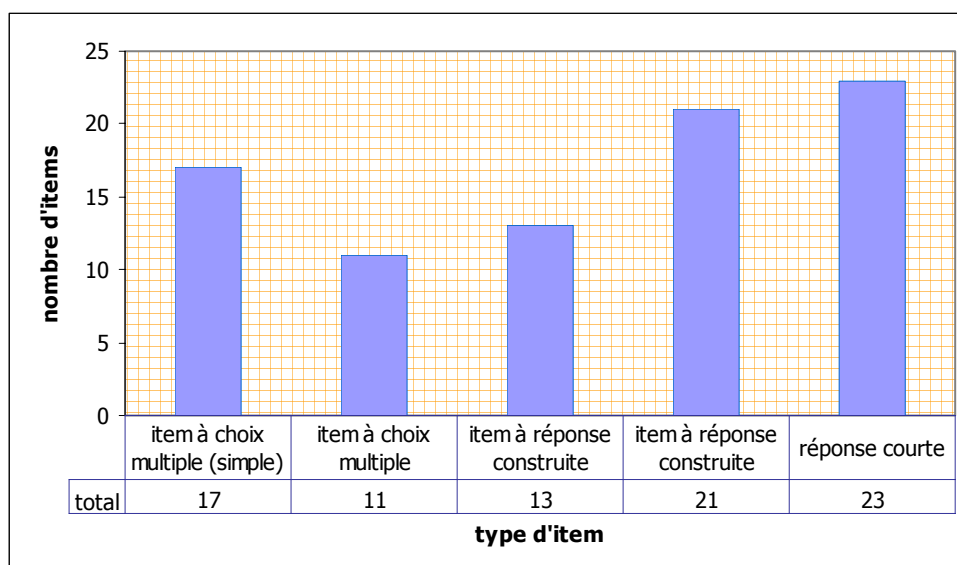


Figure 3 : Nombre d'items mathématiques répartis selon les formats des questions du test PISA 2003

PISA 2003 : Classes de compétences

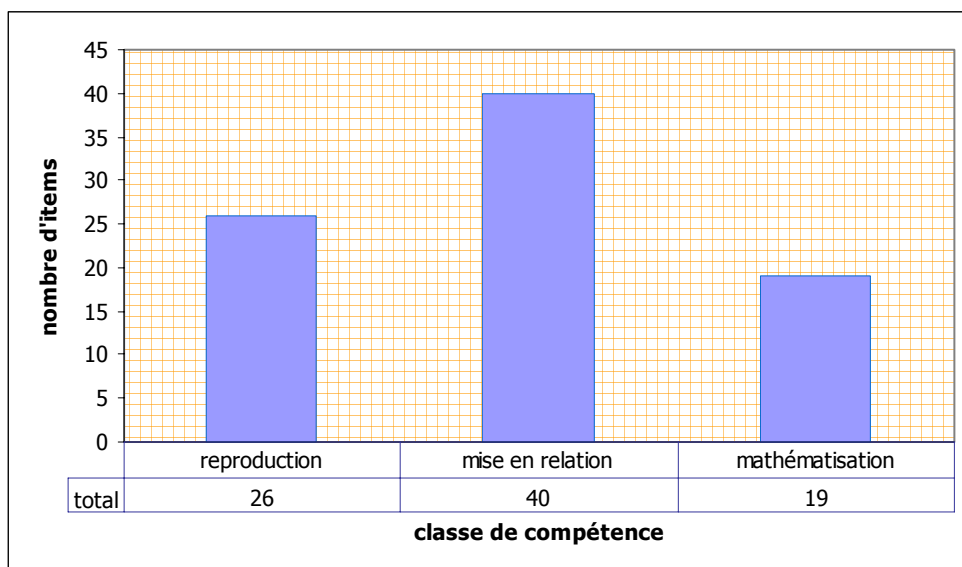


Figure 4 : Nombre d'items mathématiques répartis selon les classes de compétences du test PISA 2003

PISA 2003 : Idées majeures

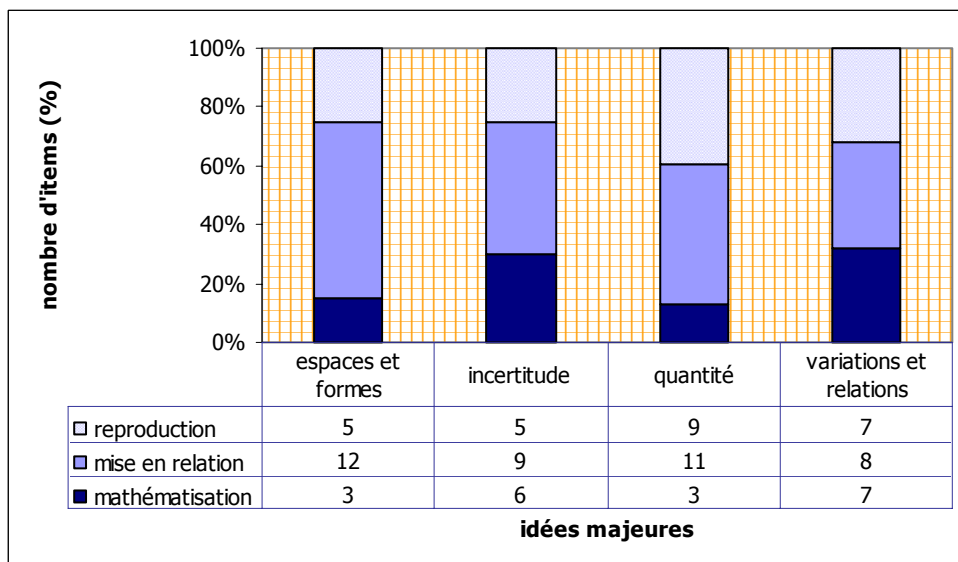


Figure 5 : Nombre d'items mathématiques répartis selon les idées majeures et les classes de compétences